Sous-groupes distingués et caractères

Lemme 1. *Soit $\rho : G \to \mathcal{GL}(V)$ une représentation linéaire de G de caractère χ. Alors :*

$$\operatorname{Ker}(\rho) = \operatorname{Ker}(\chi) = \{g \in G \,|\, \chi(g) = \chi(e)\}$$

Démonstration.

($\subseteq$) Pour $g \in G$, si $\rho(g) = \rho(1)$ alors $\chi(g) = \operatorname{tr}(Id_V) = \dim V = \chi(e)$. Donc $\operatorname{Ker}(\rho) \subseteq \operatorname{Ker}(\chi)$.

($\supseteq$) Réciproquement, soit $g \in G$ tel que $\chi(g) = \chi(e)$. De plus, ρ est diagonalisable de valeurs propres des racines de l'unité $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$, avec $d = \dim V$. $\chi(g)$ en est la somme, donc :

$$|\chi(g)| = \left|\sum_{i=1}^{d} \zeta_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{d} |\zeta_i| = d = \dim V = \chi(e)$$

Or, il y a égalité si, et seulement si, il y a égalité dans l'inégalité triangulaire, donc si les ζ_i sont tous égaux. Comme $\sum_{i=1}^{d} \zeta_i = \chi(g) = \dim V$, on a $\zeta_i = 1$ pour tout $i \in [\![1, d]\!]$. Donc $\rho(g)$ est diagonalisable avec pour seule valeur propre 1, c'est donc l'identité.

□

Proposition 2. *Soient $\chi_1, \ldots, \chi_k$ les caractères irréductibles de G. Les sous-groupes distingués de G sont les $\bigcap_{i\in I} \operatorname{Ker}(\chi_i)$ où $I \subset [\![1, k]\!]$.*

Démonstration.

($\subseteq$) Une intersection de sous-groupes distingués est distinguée, donc tout sous-groupe du type $\bigcap_{i\in I} \operatorname{Ker}(\chi_i)$ où $I \subset [\![1, k]\!]$ est distingué.

($\supseteq$) Réciproquement, soit N distingué dans G. Soit $\tilde{\rho}$ la représentation régulière du groupe G/N. On l'étend en une représentation ρ de G via la projection $G \to G/N$. Alors :

$$\operatorname{Ker}(\rho) = \left\{g \in G \,\middle|\, \forall\, h \in G, \overline{gh} = \overline{h}\right\} = \left\{g \in G \,\middle|\, \forall\, h \in G, h^{-1}gh \in N\right\} = N$$

Décomposons ρ en somme directe de représentations irréductibles :

$$\rho = \bigoplus_{i=1}^{r} m_i \rho_i \quad \text{avec} \quad \rho_i : G \to GL(V_i) \text{ de caractère } \chi_i$$

avec m_i le nombre de fois où ρ_i apparaît dans ρ. Par le lemme précédent, on a donc :

$$g \in \operatorname{Ker}(\rho) \quad \Leftrightarrow \quad \chi(g) = \chi(e) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{r} m_i \chi_i(g) = \dim V$$

Pour $g \in \operatorname{Ker}(\rho)$, on obtient alors :

$$\dim V = \left|\sum_{i=1}^{r} m_i \chi_i(g)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{r} m_i |\chi_i(g)| \leqslant \sum_{i=1}^{r} m_i \chi_i(e) = \sum_{i=1}^{r} m_i \dim V_i = \dim V$$

Ainsi $\sum_{i=1}^{r} m_i |\chi_i(g)| = \sum_{i=1}^{r} m_i \chi_i(e)$, ce qui équivaut à $m_i \chi_i(g) = m_i \chi_i(e)$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, donc à $g \in \operatorname{Ker}(\chi_i)$ dès que $m_i \neq 0$. Posons $I = \{i \in [\![1, r]\!] \,|\, m_i \neq 0\}$. Alors :

$$N = \bigcap_{i\in I} \operatorname{Ker}(\chi_i)$$

□

Corollaire 3. *G est simple si, et seulement si, pour tout caractère irréductible non trivial de G et tout $g \in G \setminus \{e\}$ on a $\chi(g) \neq \chi(e)$.*

Démonstration.

— On suppose qu'il existe χ un caractère irréductible non trivial et $g \in G \setminus \{e\}$ vérifiant $\chi(g) = \chi(e)$. Alors $\mathrm{Ker}(\chi)$ est un sous-groupe distingué de G par la proposition précédente. $\mathrm{Ker}(\chi)$ n'est pas trivial car il contient $g \neq e$, et est distinct de G car χ n'est pas trivial. Donc G n'est pas simple.

— Réciproquement, si G n'est pas simple, soient H un sous-groupe distingué non trivial de G et $g \in H \setminus \{e\}$. Par la proposition précédente, on peut écrire $H = \bigcap_{i \in I} \mathrm{Ker}(\chi_i)$ avec χ_i des caractères irréductibles de G. Comme H est distinct de G, il existe $i_0 \in I$ tel que χ_{i_0} n'est pas le caractère trivial. Alors $g \in \mathrm{Ker}(\chi_{i_0})$, et $\chi_{i_0}(g) = \chi_{i_0}(e)$.

□

Références

[Pey08] G. Peyré. *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier.* Ellipses